MA’RUZA

FUNKSIYALARNI TEKSHIRISHDA VA GRAFIKLAR YASASHDA HOSILANING TADBIQI

Mavzuning rejasi

1. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish:
 1) funksiyaning monotonligi;
 2) funksiyaning ekstremumi;
 3) funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari;
 4) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish;
 5) funksiya grafigining asimptotalari;
 6) funksiyani tekshirishning umumiy rejasi.
2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi.
3. Differensial hisobning iqtisodda qo’llanilishi haqida.

Tayanch so’z va iboralar: qavariqlik, botiqlik, asimtota, egiluvchanlik.

1. Funksiya grafigining *qavariqlik, botiqlik* oraliqlarini va *egilish* nuqtalarini hosila yordamida tekshirish

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o’tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda ***qavariq*** deyiladi.

2-ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o’tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda ***botiq*** deyiladi.

3-ta’rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta **egilish** nuqtasi deyiladi.

***Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo’lishining yetarli shartlari*:**

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya’ni $f''(x) < 0$ bo’lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo’ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya’ni $f''(x) > 0$ bo’lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo’ladi.

$f''(x) = 0$ va $f''(x)$ mavjud bo’lmagan nuqtalarga 2-tur kritik nuqtalar deyiladi.

Egilish nuqtalari mavjud bo’lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo’lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o’tishda ishorasni o’zgartirsa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo’ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo’lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi.

2. Funksiya grafigining asimptotalari.

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo’ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to’g’ri chiziqqacha masofa no’lga intilsa, bu to’g’ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining ***asimptotasi*** deyiladi.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bo’lsa, $x = a$ to’g’ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo’ladi.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad va \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

yoki

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\quad va\quad b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

limitlar mavjud bo'lsa, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k=0$ bo'lsa, $y=b$ gorizantal asimptota bo'ladi.

1-misol. Gauss egri chizig'i deb ataluvchi $y=e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y'=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2},\ y''=-2\left\lfloor x'e^{-x^2}+(-2xe^{-x^2})x\right\rfloor=(4x^2-2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$(4x^2-2)e^{-x^2}=0,\ e^{-x^2}\neq 0,\ 4x^2-2=0\ ,\ x^2=\frac{1}{2};\ \ x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo'lib, sonlar o'qini

$$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\ \textit{ва}\ \ (\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ oraliqlarda $y''>0$ bo'lib, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y''<0$ bo'ladi.

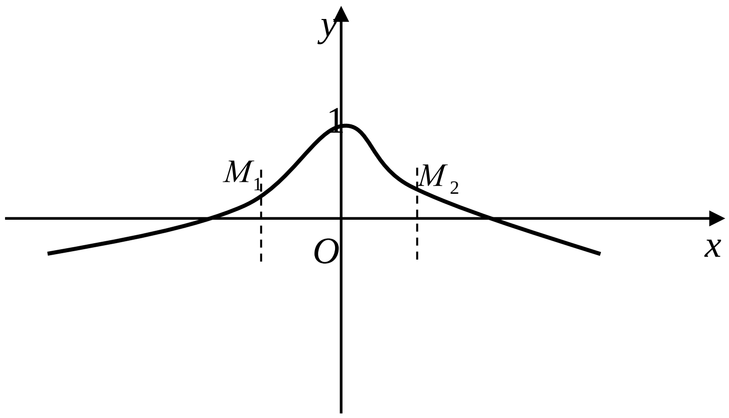
Demak,

$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\,\textit{ва}\ \ (\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq,

$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'lib, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo'ladi:

$$f_{\textit{эгл}}=(-\frac{1}{\sqrt{2}})=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}};\ M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}).\ \ f_{\textit{эгл}}(\frac{1}{\sqrt{2}})=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\ \ M_2(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}).$$

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz.



3. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi.

Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o'zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;

8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;

9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

10) imkoniyati bo’lsa funksiya grafigining koordinat o’qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

2-misol. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no’lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1=-2, x_2=2$ nuqtalarda no’lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,-2)$, $(-2;+2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o’zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\ \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty\ ;$$

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

bo’lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T)=f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x=\pm2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x)=0,\ x=0,\ x=\pm2\sqrt{3}..$$

Bundan tashqari $f'(x)$, $x=\pm2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$

bo’ladi;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2),(-2,0)$, $(0,2),(2,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$

oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *va* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya’ni funksiya bu oraliqlarda o’suvchi; $(-2\sqrt{3},-2),(-2,0)$, $(0,2),(2,2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x)<0$, ya’ni kamayuvchi $x_1=-2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5=2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo’ladi. $x=0$ kritik nuqtadan o’tishda $f'(x)$ ishorasi o’zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo’q.

$$\max f(x)=f(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3};\ \min f(x)=f(2\sqrt{3})=3\sqrt{3}\ ;$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1=-2;\quad x_2=0;\quad x_3=2$$

bo’ladi ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo’lsin.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\quad f''(1)<0,\quad f''(3)>0$ bo’lib, $(-\infty,-2)$ *ва* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *ва* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo’ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o’zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo’ladi $f(0)_{эгл}=0;$

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty \quad ва \quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty\ .$$

Demak, $x=-2$, $x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo’ladi.

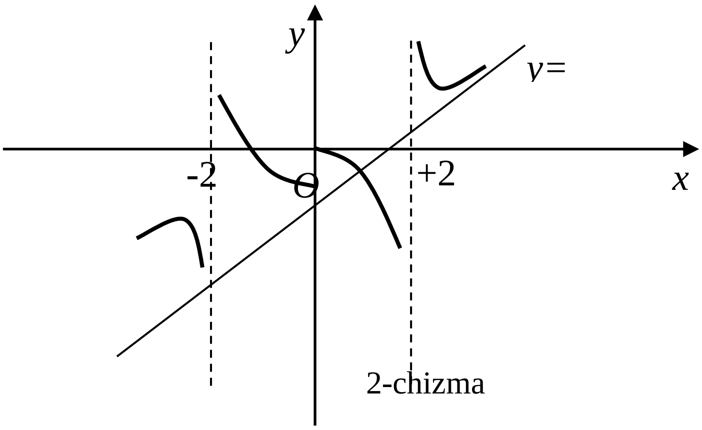
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og’ma asimptota bo’ladi;

10) $x=0$ bo’lganda $y=0$ bo’lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o’tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (2-chizma).



2-chizma

4. *Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi)*.

Hosila yordamida erkli o'zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o'zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko'p iqtisodiy masalalarni hal etishda ***nisbiy orttirma,*** ya'ni argumentning o'sish foiziga mos, funksiyaning o'sish foizini hisoblashga to'g'ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

1-ta'rif. $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$

nisbatlarga, mos ravishda, argument va ***funksiya nisbiy orttirmalari*** deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

ni qaraymiz. Bu nisbatni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1)$$

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

kelib chiqadi.

2-ta'rif. (2) munosabatga $y = f(x)$ ***funksiyaning*** x ***ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi***, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

bo'ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o'sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y = 3x - 6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish Egiluvchanlik ta'rifiga asosan:

$$E_{\breve{o}}(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x = 10$ bo'lsa, funksiya egiluvchanligi

$$\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$$

bo'ladi, ya'ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}\%$ ga oshadi.

4-misol. $y = 1 + 6x^2 - 4x^3$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{1+6x^2-4x^3}(12x - 12x^2) = \frac{12x^2 - 12x^3}{1+6x^2-4x^3}$$

Masalan, $x = 1$ bo'lganda, $\frac{(12-12)}{7} = 0.$ Bu argument 1% ga ya'ni 1 dan 1,01 ga oshganda, funksiya qiymati taqriban o'zgarmaydi.

Endi funksiya egiluvchanligini hisoblashda qo'llaniladigan ayrim qoidalarni eslatamiz.